Termodinámica y Relatividad especial

Diego B. H. Juárez

Introducción

De acuerdo con las observaciones de la radiación cósmica de fondo y de la densidad de masa bariónica (la que brilla), la entropía por barión en el universo es de alrededor de $10^8 \sim 10^9$ ¿De dónde provino todo ese calor?Una posible respuesta es buscarla en los procesos disipativos que ocurrieron a una edad temprana del universo.

Al igual que el ejemplo anterior, muchos fenómenos observados en astrofísica y cosmología que requieren ser explicados con el uso de la termodinámica; sin embargo, como la mecánica cambia sus ecuaciones para adaptarse a escalas astronómicas eso nos hace sospechar que también las ecuaciones de la termodinámica también deben adaptarse[1].

Formulación Asíncronica

En la Formulación Asíncrona de la Termodinámica Relativista se admite que existe un referencial privilegiado, referencial S_W, en el cual todas las fuerzas que se ejercen sobre el sistema se aplican simultáneamente, es decir, durante el mismo intervalo de tiempo Δt; un observador en otro sistema de referencia, referencial S_A, en configuración estándar (en la configuración estándar el referencial S_A se mueve en la dirección x de S_W con velocidad uniforme V y los ejes correspondientes de S_W y de S_A permanecen paralelos a lo largo del movimiento, habiendo coincidido a tiempo $t = t_A = 0$) respecto de S_W, no intenta realizar experiencias en las que él mismo vea fuerzas aplicadas simultáneamente en su propio referencial, para compararlas con las observaciones en S_W (lo que constituiría una formulación asíncrona), sino que transforma las medidas que ya ha realizado el observador en S_W a su propio referencial S_A. Esta forma de proceder por parte del observador en S_A, implica inevitablemente que sucesos de aplicación de fuerzas que son simultáneos en S_W ya no serán simultáneos en S_A (efecto relativista de pérdida de la simultaneidad), lo que justifica el nombre de asíncrona para esta formulación.

Transformación de la temperatura, presión y volumen

Imagine un contenedor con un gas ideal a una cierta temperatura T_0, presión P_0, y volumen V_0, en un sistema de referencia S. Ahora piense en un observador en un sistema S' con una velocidad *v* con respecto a S que mide la temperatura del gas desde su marco de referencia ¿Será la misma T que un observador en S mide? ¿Ó T' será distinta? ¿T es una invariante?

Para resolver este problema comencemos pensando como cambian las otras variables termodinámicas. Empecemos cono el volumen. Recordando la contracción de Lorentz

1 O en caso de que no pueda adaptarse, encontrar un análogo para los sistemas que se estudien.

$$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{l_0}{\gamma} \qquad (1)$$

Y recordando que:

$$V_0 = A \cdot l_0 \qquad (2)$$

Se puede ver que:

$$V = \frac{Al_0}{\gamma} = \frac{V_0}{\gamma} \qquad (3)$$

Para la presión P, pensemos en la definición de la presión

$$P = \frac{F}{A} \qquad (4)$$

donde F es la fuerza y A el área

De la transformaciones de la fuerza:

$$F_x = F_x^0 \qquad (5)$$

$$F_y = \frac{F_y^0}{\gamma} \qquad (6)$$

$$F_z = \frac{F_z^0}{\gamma} \qquad (7)$$

pero la presión se aplica a la cara perpendicular del eje x, por lo que la fuerza no cambia, entonces:

$$P = P_0 \qquad (8)$$

Y por ley de gases ideales:

$$T = \frac{PV}{nR} \qquad (9)$$

Introduciendo (3) y (8) en (9)

$$T = \frac{P_0 V_0}{nR\,\gamma} = \frac{T_0}{\gamma} \qquad (10)$$

con lo que obtenemos que la temperatura no es un invariante[2] sino que cambia para un observador en S'. Además como $\gamma > 1$ vemos que por lo tanto T' es menor que T_0. Y para $v \sim c$ la temperatura T' tiende a cero.

Transformaciones de la energía interna, el trabajo, el calor y la entropía

Regresando al mismo gas, pensemos ahora como cambia la energía interna desde un marco de referencia inercial a uno en movimiento. Para el caso de un fluido con densidad ρ, presión P que se mueve con una velocidad v, se puede escribir la densidad de momento (g) como:

2 Pienso que esto es más fácil verlo si pensamos en la teoría cinética de gases, pues la T=T(u) donde u es la velocidad promedio de las partículas que componen al gas, pero esto para S,pero para S' T=T(u') con lo que debe cambiar. Además como detalle curioso, entonces la función temperatura debe tener una cota superior pues u<c.

$$g = \rho v + \frac{P v}{c^2} \qquad (11)$$

donde el primer término se refiere al momento asociado con el movimiento de masa y el segundo está asociado con el flujo de energía resultante hecho al mover el fluido por la presión que actúa sobre él. Introduciendo la relación entre la masa y la energía:

$$G = \frac{E + PV}{c^2} v \qquad (12)$$

donde V es el volumen.

Derivando ésta expresión respecto al tiempo obtenemos la fuerza, F:

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{E + PV}{c^2} v \right) \qquad (13)$$

de donde podemos obtener que

$$\frac{dE}{dt} = F \cdot v - P \frac{d\,V}{dt} \qquad (14)$$

De (3) y (8) del apartado anterior, y de (14) sustituyendo en (13) se puede escribir:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt}\frac{v^2}{c^2} + P\frac{v^2}{c^2}\frac{d\,V}{dt} + \frac{E + PV}{c^2} v\, d\frac{V}{dt} - P\frac{d\,V}{dt} \qquad (15)$$

de donde:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d}{dt}(E + PV) = \frac{E + PV}{c^2} \qquad (16)$$

Integrando:

$$E + PV = \gamma A \qquad (17)$$

Donde A es una constante. Para evaluarla se hace v=0. Con lo que:

$$E + PV = \gamma(E_0 + P_0 V_0) \qquad (18)$$

De donde se obtiene que:

$$E = \gamma\left(E_0 + P_0 V_0 \frac{v^2}{c^2} \right) \qquad (19)$$

que es la transformación para la energía del sistema:

Por otro lado, para calcular el trabajo W podemos escribir:

$$dW = P\,d\,V - v \cdot dG \qquad (20)$$

El primer término viene de la definición clásica de la diferencial del trabajo y el segundo término se debe a la fuerza externa necesaria para mantener la velocidad constante.

Diferenciando (12) y sustituyendo en (20):

$$dW = \mathrm{P}\, d\,\mathrm{V} - \frac{v^2}{c^2} d\left(E + \mathrm{PV}\right) \qquad (21)$$

Introduciendo (3), (8) y (18) en (21):

$$dW = \frac{\mathrm{P}_0 d\,\mathrm{V}_0}{\gamma} - \frac{v^2}{c^2}\gamma\, d\left(E_0 + \mathrm{P}_0\mathrm{V}_0\right) \qquad (22)$$

ó:

$$dW = \frac{d\,W_0}{\gamma} - \frac{v^2}{c^2}\gamma\, d\left(E_0 + \mathrm{P}_0\mathrm{V}_0\right) \qquad (23)$$

que es la diferencial del trabajo en cantidades medibles.

Para encontrar la transformación del calor (Q) tenemos un gran problema, puesto que toda la formulación relativista es mecánico y el calor no tiene ninguna representación mecánica; sin embargo, recordando la primera ley de la termodinámica:

$$dQ = dE + dW \qquad (24)$$

de donde al sustituir (19) y (23) se obtiene que:

$$dQ = dE_0 + dW_0 \qquad (25)$$

Para un sistema de coordenadas apropiado[3] :

$$dQ_0 = dE_0 + dW_0 \qquad (26)$$

de donde se ve que:

$$dQ = \frac{dQ_0}{\gamma} \qquad (27)$$

e integrando (27) se obtiene que el calor está dado como:

$$Q = \frac{Q_0}{\gamma} \qquad (28)$$

Para la entropía (S) tenemos la transformación simple[4]:

$$S = S_0 \qquad (28)$$

Radiación de un cuerpo negro en movimiento

Supongamos que tenemos un cuerpo negro radiando, de la ley de Stefan-Boltzman:

$$E = a\,\mathrm{V}_0 T_0^4 \qquad (29)$$

Donde a es la constante de Stefan-Boltzman

Ahora, pensemos en un sistema de referencia que se mueve respecto al sistema del cuerpo negro, con una velocidad v. De la transformación (19) se obtiene que:

3 S con v=0

4 La verdad no me es muy como se llega a está conclusión.

$$E=\gamma\left(\mathrm{V}_0 T_0^4+\frac{1}{3}a\,\mathrm{V}_0 T_0^4\frac{v^2}{c^2}\right)=\gamma E_0\left(1+\frac{1}{3}\frac{v^2}{c^2}\right)\qquad(30)$$

Formulación de segunda ley de la termodinámica en cuatro dimensiones

Por último, escribiré como se ve la segunda ley en el lenguaje de cuadrivectores. Primero hay que definir a Φ como la densidad de entropía por unidad del volumen. Luego definimos el vector entropía como:

$$S^{\mu}=\Phi\frac{dx^{\mu}}{ds}\qquad(31)$$

donde los términos $\frac{dx^{\mu}}{ds}$ son las velocidades generalizadas.

Entonces la segunda ley se ve como:

$$\frac{dS^{\mu}}{dx^{\mu}}\delta x^1\delta x^2\delta x^3\delta x^4\geqslant\frac{\delta Q_0}{T_0}\qquad(32)$$

Referencias:

Carcía-Colín, Leopoldo. *Notas sobre termodinámica irreversible y sus aplicaciones.* El Colegio Nacional

Güémes, J., *¿Es posible una Termodinámica relativista?*, Rev. Esp. Fis. 24, 47-57 (2010).

Tolman,Richard. *Relativity Thermodinamics and Cosmology.* Dover Publication Inc. New York.1987. Cap.5 pp.152-164